

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

ZAVRŠNI RAD

**PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD  
MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA**

Voditelj rada:  
Doc. dr.sc. Lovorka Grgec-Bermanec

Vjekoslav Čukman  
(0035155617)

Zagreb, srpanj 2010.

PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

---

**Sadržaj**

1.	Tekst zadatka .....	3
2.	Sažetak rada .....	5
3.	Popis slika i tablica .....	6
4.	Popis oznaka i mjernih jedinica fizikalnih veličina .....	8
5.	Uvod .....	9
6.	Mjerni pretvornici tlaka .....	11
6.1.	Metode mjerenja tlaka .....	11
6.2.	Kapljevinski (tekućinski) manometri .....	12
6.2.1.	Torricelliev barometar .....	14
6.2.2.	U-manometar .....	16
6.2.3.	U-manometar nesimetrične izvedbe .....	17
6.2.4.	Manometar s čašicom .....	18
6.2.5.	Manometar s priklonjenom cijevi (mikromanometar) .....	19
6.2.6.	Minimetar .....	20
7.	Mjerna nesigurnost .....	21
7.1.	Osnovni pojmovi .....	21
7.2.	Određivanje standardne nesigurnosti A vrste .....	24
7.3.	Određivanje standardne nesigurnosti B vrste .....	25
7.4.	Postupak za izračunavanje mjerne nesigurnosti .....	27
8.	Rezultati .....	29
8.1.	Rezultati mjerenja gravitacije .....	29
8.2.	Rezultati laboratorijskog mjerenja .....	34
9.	Zaključak .....	44
10.	Literatura .....	47

# PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM MANOMETRIMA

## 1. Tekst zadatka



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
**FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE**



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite  
Povjerenstvo za završne ispite studija strojarstva za smjerove:  
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

## ZAVRŠNI ZADATAK

Student: VJEKOSLAV ČUKMAN

Mat. Br.: 0035155617

Naslov: Procjena mjerne nesigurnosti kod mjerenja tlaka cijevnim manometrima

Opis zadatka:

Mjerenje visine stupca tekućine poznate gustoće i poznate lokalne gravitacije spada u primarne metode mjerenja tlaka. Tu spadaju moderne izvedbe U-cijevi punjenih živom ili nekom drugom tekućinom.

U ovom radu potrebno je razraditi metode mjerenja tlaka cijevnim manometrima. Odrediti lokalnu gravitaciju za poziciju laboratorija te postupak procjene mjerne nesigurnosti pri mjerenju cijevnim manometrima.

Potrebno je izraditi:

- Opisati fizikalne osnove mjerenja tlaka;
- Pregled vrsta cijevnih (tekućinskih) manometara;
- Opisati korekcije mjerenja tlaka cijevnim manometrima;
- Postupak procjene mjerne nesigurnosti;
- Opis i rezultate mjerenja s pripadajućim mjernim nesigurnostima.

U radu navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

11. prosinca 2009.

Zadatak zadao:

Doc. dr. sc. Lovorka Grgec Bermanec

Rok predaje rada:

Prosinac 2010.

Predsjednik Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Zvonimir Guzović

Referada za diplomske i završne ispite

Obrazac DS - 3A/PDS - 3A

*Izjavljujem da sam ovaj rad radio samostalno, služeći se znanjem stečenim tokom studija i  
koristeći se navedenom literaturom.*



## 2. Sažetak rada

Tema završnog rada je procjena mjerne nesigurnosti kod mjerenja tlaka cijevnim manometrima. Osim pojma nesigurnosti u radu je opisan i postupak određivanja standardne nesigurnosti A vrste i B vrste.

Jedan od ciljeva rada bio je određivanje lokalne gravitacije za poziciju laboratorija za procesna mjerenja (LPM-a) na fakultetu strojarstva i brodogradnje. Vrijednost te gravitacije određena je kao srednja vrijednost nekoliko metoda (formula) za određivanje gravitacije. Metode koje su korištene u ovom radu su: metoda korištenjem NPL univerzalne formule gravitacije, PTB metoda, korištenje univerzalnih jednadžbi gravitacije te podatak o vrijednosti gravitacije koju je izmjerila Geofizika na području neposredno pored fakulteta strojarstva i brodogradnje 1999. godine.

U radu su navedene i vrste cijevnih manometara (od Torricellievog manometra, U-manometara pa do minimetra). Praktični primjer korištenja jedne vrste cijevnih tekućinskih manometara je obrađen laboratorijskim umjeravanjem pretvornika tlaka uz pomoć minimetra.

Također u završnom radu su opisane i fizikalne osnove mjerenja tlaka, kao i korekcije mjerenja tlaka cijevnim manometrima. Korekcije mjerenja tlaka su izrađene kao program u excelu i to za slučaj mjerenja tlaka kod mikromanometra i minimetra. U tom programu su objedinjeni svi zadaci ovog završnog rada tako što se vrijednost gravitacije za LPM upisuje u polje predviđeno za gravitaciju, a vrijednosti laboratorijskog mjerenja minimetrom se upisuju u polja koja su potrebna da bi usporedili dobivene vrijednosti tlaka laboratorijskog mjerenja i tlaka koji nakon upisivanja tih vrijednosti dobijemo u excelu.

### 3. Popis slika i tablica

Slika 1 – Odnos tlakova (stranica 10.)

Slika 2 – Torricelliev barometar (stranica 14.)

Slika 3 – U-manometar (stranica 16.)

Slika 4 – U-manometar nesimetrične izvedbe (stranica 17.)

Slika 5 – Manometar s čašicom (stranica 18.)

Slika 6 - Manometar s priklonjenom cijevi (mikromanometar) (stranica 19.)

Slika 7 – Minimetar (stranica 20.)

Slika 8 – Ukupna nesigurnost kao geometrijski zbroj svih komponenata nesigurnosti (stranica 23.)

Slika 9 – Pravokutna razdioba (stranica 27.)

Slika 10 – PTB metoda izračuna gravitacije (stranica 29.)

Slika 11 – Unos podataka kod PTB metode (stranica 30.)

Slika 12 – Dobivena vrijednost gravitacije PTB metodom (stranica 30.)

Slika 13 - Linearna ovisnost tlaka o strujnom signalu (stranica 34.)

Slika 14 – Mjerna linija (stranica 35.)

Slika 15 - Ovisnost očitavanja na minimetru o tlaku (stranica 43.)

Slika 16 - Promjena gravitacije s obzirom na geografsku širinu (stranica 44.)

Slika 17 – Izračun tlaka kod mjerenja mikromanometrom (stranica 45.)

Slika 18 – Izračun tlaka kod mjerenja minimetrom (stranica 45.)

Tablica 1 – Vrijednosti gravitacije (stranica 32.)

Tablica 2 – Usporedba tlaka dobivenog laboratorijskim mjerenjem i tlaka izračunatog programom  
u excelu (stranica 38.)

Tablica 3 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 0$  mm (stranica 38.)

Tablica 4 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 10$  mm (stranica 38.)

Tablica 5 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 20$  mm (stranica 39.)

Tablica 6 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 30$  mm (stranica 39.)

Tablica 7 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 40$  mm (stranica 39.)

Tablica 8 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 50$  mm (stranica 40.)

Tablica 9 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 60$  mm (stranica 40.)

Tablica 10 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 70$  mm (stranica 40.)

Tablica 11 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 80$  mm (stranica 41.)

Tablica 12 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 90$  mm (stranica 41.)

Tablica 13 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 100$  mm (stranica 41.)

Tablica 14 – Mjerna nesigurnost histereze (stranica 42.)

Tablica 15 – Proširena mjerna nesigurnost (stranica 42.)

#### 4. Popis oznaka i mjernih jedinica fizikalnih veličina

$p_0 = 101325$	Pa	-normalni atmosferski tlak
$p$	Pa, (N/m <sup>2</sup> )	-tlak
$F$	N	-težina
$m_1$	kg	-masa Zemlje
$m_2$	kg	-masa tijela na površini Zemlje
$r$	m	-polumjer Zemlje
$K = 6.673 \times 10^{-11}$	m <sup>3</sup> kg <sup>-1</sup> s <sup>-2</sup>	-konstanta gravitacije
$g$	m/s <sup>2</sup>	-ubrzanje zemljine teže ili gravitacija
$\varphi$	°	-geografska širina
$R = 6.3711177 \times 10^6$	m	-srednji polumjer Zemlje
$h$	m	-visina stupca žive
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	-gustoća
$\gamma$	kg/m <sup>2</sup> s <sup>2</sup>	-specifična težina
$\alpha, \beta, \gamma$	K <sup>-1</sup>	-temperaturni koeficijenti širenja žive
$P$	N	-sila uslijed tlaka
$A$	m <sup>2</sup>	-površina presjeka
$\alpha$	°	-kut priklona kod manometra s priklonjenom cijevi
$u$	-	-ukupna nesigurnost
$q$	-	-mjerna nesigurnost pri umjeravanju
$q_i$	-	-pojedinačne opažene vrijednosti
$n$	-	-broj neovisnih opažanja
$s^2(q)$	-	-eksperimentalna varijancija
$s^2(\bar{q})$	-	-eksperimentana varijancija srednje vrijednosti
$a_+, a_-$	-	-gornja i donja granica vrijednosti ulazne veličine
$H$	m	-nadmorska visina
$\square$	°	-geografska širina
$g_e = 9.780327$	m/s <sup>2</sup>	-vrijednost gravitacije na ekvatoru

## 5. Uvod

Razvoj mjernja tlaka započeo je Torricellijevim eksperimentom 1643. god. kojim je pokazano da zemljin atmosferski omotač tlačí površinu Zemlje tlakom koji odgovara približno 760 mm Hg stupca. Od tada se tehnika mjerenja tlaka usavršila toliko da se danas mogu bez teškoća i dovoljno točno mjeriti vrlo niski i vrlo visoki tlakovi. Mjerna tehnika tlaka obuhvaća ogromno područje od oko  $10^{-9}$  do  $10^5$  at. To područje se može pokriti samo različitim izvedbama instrumenata, koji djeluju na različitim principima. Mjerila tlaka nazivamo *manometrima*.

*Tlak* je definiran djelovanjem sile na jedinicu površine. Silom na neku površinu mogu djelovati kruto tijelo, tekućine ili plinovi. Ta sila može biti posljedica gibanja molekula neke tekućine, izazvanog njenim toplinskim stanjem, ili pak težina okomitog stupca te tekućine jednoliko raspoređene po vodenoj podlozi. Kod plinova i tekućina molekule međusobno djeluju istim tlakom pod kojim se nalazi čitava masa ili dio plina. U plinovima i tekućinama tlak djeluje u svim smjerovima jednakim intenzitetom. Kod krutih tijela tlak definiramo kao omjer sila međusobnog djelovanja u smjeru normale na dodirnu površinu i veličinu same površine.

Zračni omotač Zemlje djeluje svojom težinom na njenu površinu i na taj način izaziva atmosferski tlak. Težina zračnog omotača iznosi oko 1 kp po svakom  $\text{cm}^2$  zemljine površine što izražavamo tlakom od  $1 \text{ kp/cm}^2$  ( $1 \text{ kp} = 9.81 \text{ N}$ ). Međutim važno je znati da tlak ovisi o trenutnoj težini tako zamišljenog stupca zraka, koja je podložna mnogim utjecajima, pa se atmosferski tlak stalno i nepravilno mijenja. Nizom mjerenja utvrđen je njegov normalni iznos na površini mora pri temperaturi od  $15^\circ\text{C}$  pa se za normalni atmosferski tlak uzima:

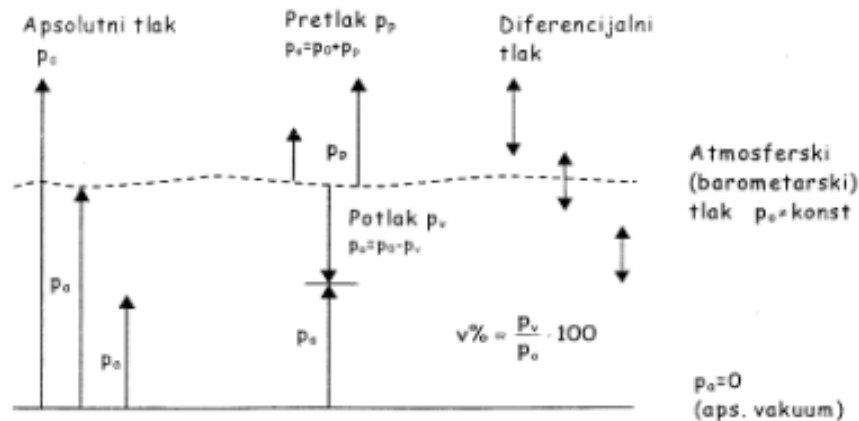
$$p_0 = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg} = 1.03327 \text{ kp cm}^{-2} = 101325 \text{ Pa}$$

S obzirom na polaznu veličinu tlaka pri mjerenju postoji:

- **Vakuum** – prazan prostor, koristi se i kao pojam za vrlo mali tlak sveden na najmanju ostvarivu vrijednost
- **Apsolutni tlak** – tlak mjeren s obzirom na ništicu tj. vakuum
- **Relativni tlak** – tlak mjeren s obzirom na atmosferski tlak

Razlika tlakova je bilo koja razlika tlakova mjerenih na dva mjesta u prostoru. S obzirom na razliku tlakova imamo ( *Slika 1*):

- **Nadtlak (pretlak)** – tlak veći od atmosferskog
- **Podtlak** – tlak manji od atmosferskog



Slika 1 - Odnos tlakova

Instrumenti za mjerenje tlaka mjere uvijek razliku tlakova ovisno o tome koja im je referentna vrijednost, apsolutni ili relativni tlak. Kako se atmosferski tlak s vremenom mijenja ne može se uzeti kao referentna vrijednost kod točnijih mjerenja bez posebne kompenzacije tih promjena.

Osnovna jedinica za mjerenje tlaka je Pascal. 1 Pascal je definiran kao tlak kojeg proizvodi sila od 1 N kad jednoliko raspoređena djeluje na površinu od 1 m<sup>2</sup>.

*Tlak* je u osnovi mehanički pojam koji se može u potpunosti opisati u terminima osnovnih SI jedinica *duljine, mase i vremena*.

Za fluid u mirovanju tlak se definira kao normalna sila na jedinicu površine:

$$p = \frac{dF}{dA}$$

Kao vektorska veličina, sila ima svoju veličinu i smjer, pa općenito postoje tri nezavisne komponente tlaka tj. naprezanja koje djeluju na površinu. Sva mjerila tlaka se koriste za mjerenja tlaka u fluidu, a ne u krutim tijelima. U mehanici fluida tlak je specifična težina  $w$ , prema visini  $h$ :

$$dp = w \cdot dh$$

*Sva mjerenja (osnovna) tlaka se temelje na te dvije definicije.*

Tlak je općenito rezultat djelovanja molekula unutar nekog fluida na stjenke posude. Ako posuda ne sadrži niti jednu molekulu tlak u njoj ima iznos nula, odnosno 100% vakuum. Tlak mjeren na skali koja koristi apsolutnu nulu kao referentnu vrijednost zove se **apsolutni tlak**, a tlak koji koristi tlak okoline kao referentnu vrijednost se naziva **pretlak**.

$$APSOLUTNI \text{ TLAK} = \text{TLAK OKOLINE} + \text{PRETLAK}$$

## 6. Mjerni pretvornici tlaka

Mjerni pretvornici tlaka osjećaju promjene tlaka pomoću mehaničkih osjetila u kojima se na prikladan način uspostavlja ravnoteža sila i kao posljedica mjerljiv pomak ili deformacija. Tako su razvijeni različiti pretvornici tlaka, a svrstavaju se prema načinu osjećanja tlaka, pomaka ili deformacije kao posljedice tlaka. U pretvornike tlaka *ne spadaju pretvornici vakuuma*.

### 6.1. Metode mjerenja tlaka

Mjerila tlaka u znanosti i industriji razvijaju se gotovo 200 godina i do danas je razvijen prilično velik broj različitih principa mjerenja statičkog tlaka. Jedna od prihvatljivih klasifikacija današnjih metoda mjerenja tlaka i vakuuma je:

#### 1. Direktni mjerni principi

##### -Mehanička deformacija

##### -Membrana

##### -Kapacitivni manometar

##### -Piezorezistivni

##### -Tenzometrijske trake

##### -Induktivni

##### -Schaffer

##### -Bourdonova cijev

##### -Jednostavna

##### -Spiralna

##### -Ekscentrična cijev

##### -Kapsula

##### -Aneroidni barometar

##### -Piezoelektrični efekt

##### -Kvarcni kristal

##### -Promjena otpora

##### -Manganin

##### -Djelovanje sile na poznatu površinu

##### -Plinske tlačne vage

##### -Hidraulične tlačne vage

##### -Manometri sa uranjajućim zvonom

- Stupac tekućine
  - Živin manometar
  - Vodeni manometar
  - Ostale tekućine

## 2. Indirektni mjerni principi

- Ionizacija
  - Vruća katoda
    - Bayard Alpert-ova mjerila
  - Trioda
  - Hladna katoda
    - Peningovo mjerilo
- Toplinska vodljivost
  - Pranijevo mjerilo
  - Termopar
- Viskozitet
  - Rotirajuća cijev

### 6.2. **Kapljevinski (tekućinski) manometri**

U ovu grupu spadaju oni manometri koji sadrže kapljevinu. Stupac te kapljevine, određene visine i presjeka, djeluje kao kapljevinski uteg poznate težine. Kao mjera težine tog utega uzima se obično njegova visina u kalibriranoj staklenoj cijevi. Težina tog utega je sila koja služi za usporedbu sa silom kojom mjereni tlak djeluje na određenu površinu.

*Težina* je sila kojom tijelo djeluje na svoju podlogu. Ta sila nastaje uslijed privlačenja masa po zakonu:

$$F = K \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$m_1$  – masa Zemlje

$m_2$  – masa tijela na površini Zemlje

$r$  – polumjer Zemlje

$K$  – konstanta gravitacije ( $6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ )

Ako se za masu tijela  $m_2$  uzme 1 kg dobije se  $F = 9.81 \text{ kg m s}^{-2} = 9.81 \text{ N}$ .



Ta je sila određena umnoškom mase tijela od 1 kg i ubrzanja zemljine težine  $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$  pa općenito vrijedi za težinu:

$$G = F = m \cdot g$$

Važno je da je ubrzanje zemljine teže ( $g$ ) ovisno o mjestu mjerenja, točnije o geografskoj širini (najmanje na ekvatoru  $9.78 \text{ ms}^{-2}$ , a najveće na polovima  $9.83 \text{ ms}^{-2}$ ) i nadmorskoj visini. Zbog toga se za točnija mjerenja ta vrijednost ne smije smatrati konstantnom s obzirom na različita mjesta zemljine površine. Međutim, na jednom te istom mjestu nije zapažena promjena gravitacije pa se za jednom određenu za dotično mjesto može smatrati konstantnom u svim uvjetima mjerenja.

Ubrzanje zemljine teže ili gravitacija ovisi o geografskoj širini  $\varphi$  po zakonu:

$$g = 9.78049 (1 + 5.2884 \times 10^{-3} \sin^2 \varphi - 5.9 \times 10^{-6} \sin^2 2\varphi)$$

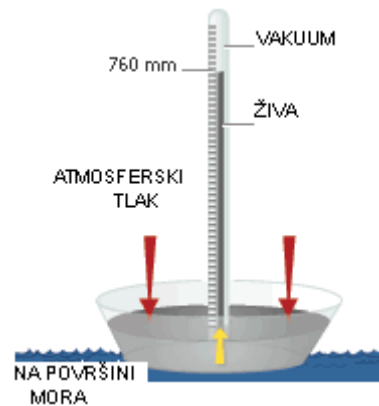
Pored toga gravitacija Zemlje ovisi o nadmorskoj visini  $h$ :

$$g = g_0 \frac{1}{1 + 2 \frac{h}{R} + \left(\frac{h}{R}\right)^2}$$

$R$  – srednji polumjer Zemlje ( $6.3711177 \times 10^6 \text{ m}$ )

Manometri s kapljevnom podliježu gravitacijskim utjecajima, ako se mijenja mjerno mjesto, ali ipak po svojim svojstvima spadaju u grupu apsolutnih instrumenata koji se mogu baždariti pomoću tri osnovne SI veličine: kg, m, s.

### 6.2.1. Torricelliev barometar



Slika 2 - Torricelliev barometar

Torricelliev barometar (Slika 2) je najjednostavniji kapljevinski manometar. Namjenjen je mjerenju atmosferskog, dakle apsolutnog tlaka. Izrađen je tako da se kalibrirana čista staklena cijev, zataljena na jednom kraju, napuni čistom živom, začepi, okrene, uroni u posudu sa živom i odčepi. Tada stup žive u cijevi zauzme visinu od oko 760 mm od razine žive u posudi što ovisi o postojećem atmosferskom tlaku. Iznad meniskusa žive u cijevi stvori se vakuum ili točnije nizak tlak živinih para.

Uvjet statičke ravnoteže zahtijeva da suma svih sila koje drže stup žive u predloženom položaju bude jednaka nuli, odnosno da težina stupa žive ( $G$ ) bude jednaka sili ( $P_0$ ) koju proizvodi atmosferski tlak ( $p_0$ ) djelovanjem na površinu otvora cijevi kroz živu.

$$G = P_0$$

$$h \frac{d^2 \pi}{4} \rho g = p_0 \frac{d^2 \pi}{4}$$

Kada se sredi jednačba dobiva se izraz za visinu stupca žive pod djelovanjem tlaka  $p_0$ :

$$h = \frac{1}{\rho g} p_0$$

pa je mjereni tlak:

$$p_0 = h \rho g = h \gamma$$

Uz konstantnu specifičnu težinu žive  $\gamma = \rho g$  (gdje je  $\rho$  gustoća žive, a  $g$  gravitacija na mjestu mjerenja) visina stupca žive mjera je tlaka  $p_0$ . Skala je obično ugravirana na samu cijev u mmHg. Ovaj manometar mjeri i razliku tlakova  $p_0 - p$  gdje je  $p=0$ , dakle vakuum, prema kojemu se određuje iznos mjerenog tlaka  $p_0$ . Umjesto žive može se koristiti bilo koja druga kapljevina prikladna za potrebno mjereno područje manometra, ali zbog manje specifične težine ostalih kapljevina u odnosu na živu potrebna je znatno duža cijev (npr. za vodu preko 10 m).

No i ovako jednostavan manometar je pod utjecajem mnogih smetnji koje smanjuju točnost mjerenja. Npr. manometar baždaren na  $45^\circ$  geografske širine pokazuje pozitivne greške ako se njime mjeri južnije, negativne ako se mjerno mjesto nalazi sjevernije od mjesta baždarenja. Gustoća žive ovisi o temperaturi kao i njen obujam. To se odražava i na visinu živinog stupca u cijevi manometra  $h$ :

$$h_T = h_0 (1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2 + \gamma \Delta T^3 + \dots)$$

$h_T$  – visina stupca žive na temperaturi  $T$

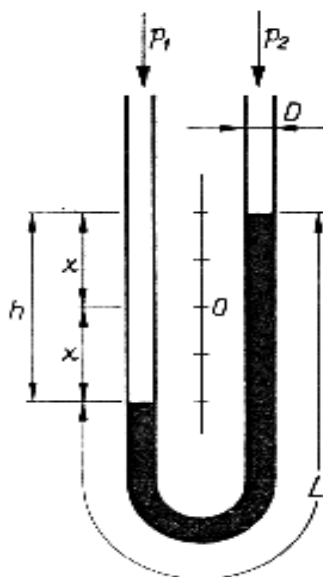
$h_0$  – visina stupca žive na temperaturi na kojoj je baždaren barometar

$\alpha, \beta, \gamma$  – temperaturni koeficijenti širenja žive

$\Delta T$  – razlika temperature na kojoj se mjeri i temperature na kojoj je baždaren barometar

Treba obratiti pažnju i na kapilarne pojave. U cijevima malog promjera živa ima konveksni meniskus pa se javlja kapilarna depresija. Kapljevine koje kvase stijenku imaju konkavni meniskus pa ispoljavaju kapilarnu elevaciju. Osim matematičkih korekcija postoje i rastezljive skale za kompenzaciju pogrešaka.

### 6.2.2. U-manometar



Slika 3 - U-manometar

Mjerenje s ovim manometrom zasniva se na istom principu kao i kod Torricellijevog barometra. Razlikuju se u izvedbi. Kalibrirana cijev savijena je u obliku slova U. Ovaj manometar (Slika 3) mjeri relativni tlak  $\Delta p = p_1 - p_2$ , dakle razliku tlakova, pa se zove i *diferencijski manometar*. Sila  $P_1$  uslijed tlaka  $p_1$  prenosi se kroz živu u desni krak gdje drži ravnotežu sa silom  $P_2$  uslijed tlaka  $p_2$  i težinom stupca žive  $G$  visine  $h$ .

$$P_1 = P_2 + G$$

$$p_2 \frac{d^2 \pi}{4} = p_1 \frac{d^2 \pi}{4} + h \rho g \frac{d^2 \pi}{4}$$

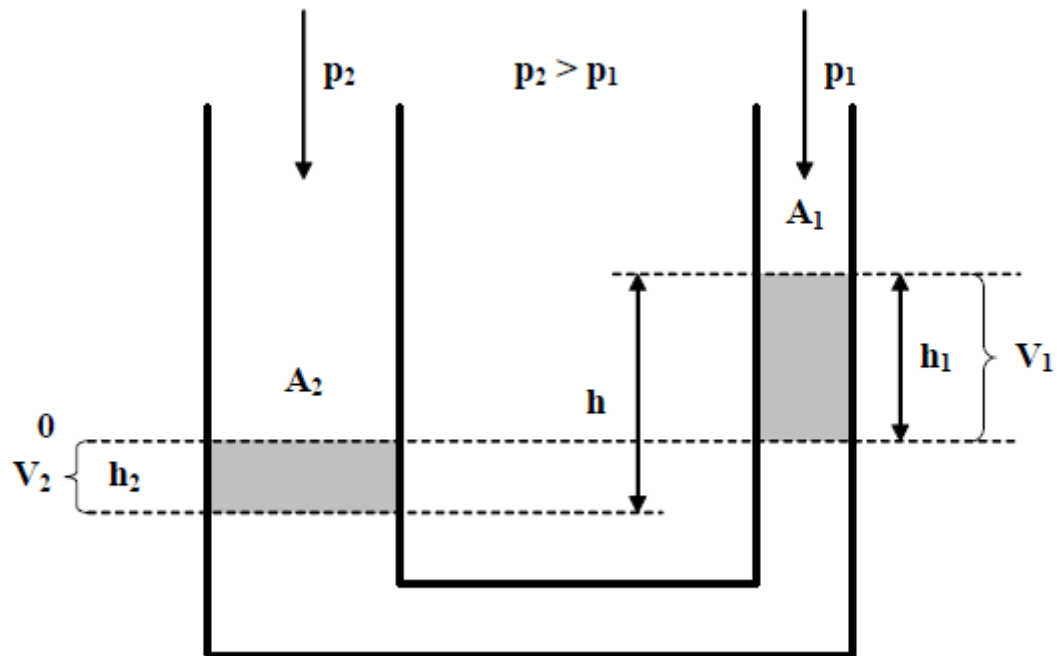
$$\Delta p = p_1 - p_2 = h \rho g = h \gamma$$

Ovo je izraz sličan izrazu za Torricellijev manometar. U-manometrom se može mjeriti apsolutni tlak kad bi  $p_1$  bio jednak 0, a što možemo postići evakuiranjem i zataljivanjem desnog otvora cijevi. Ipak, obično je desni otvor podvrgnut djelovanju atmosferskog tlaka pa u tom slučaju U-manometar služi za mjerenje relativnog pretlaka ili podtlaka. Univerzalnost primjene U-manometra je u tome što se dovodenjem bilo kakvih tlakova  $p_2$  i  $p_1$  uvijek mjeri njihova razlika. Tlakovi se najčešće dovode savitljivim gumenim cijevima koje se navuku na otvore. Smetnje su

jednake kao i kod Torricellijevog manometra, jedino se greške uslijed kapilarnih pojava kompenziraju same od sebe zahvaljujući simetričnoj izvedbi manometra.

### 6.2.3. U-manometar nesimetrične izvedbe

U-manometar nesimetrične izvedbe (Slika 4) ima cijevi s različitim površinama presjeka  $A_1$  odnosno  $A_2$ . Ako je  $\Delta p = p_2 - p_1 = 0$  razine kapljevine su jednake u obje cijevi i pokazuju razinu 0. Ako  $p_2 > p_1$  kao na slici, istisnuti obujmi moraju biti isti, no visine  $h_1$  i  $h_2$  bit će različite ovisno o površinama presjeka cijevi odnosno o njihovom omjeru.



*Slika 4 - U-manometar nesimetrične izvedbe*

Uz pretpostavku da se u desnoj cijevi razina podigla za  $h_1$ , a u lijevoj spustila za:

$$h_2 = h_1 \frac{A_1}{A_2}$$

uz razliku tlaka  $\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h$  i uz  $h = h_1 + h_2$  vrijedi:

$$h = h_1 + h_1 \frac{A_1}{A_2} = h_1 \left( 1 + \frac{A_1}{A_2} \right)$$

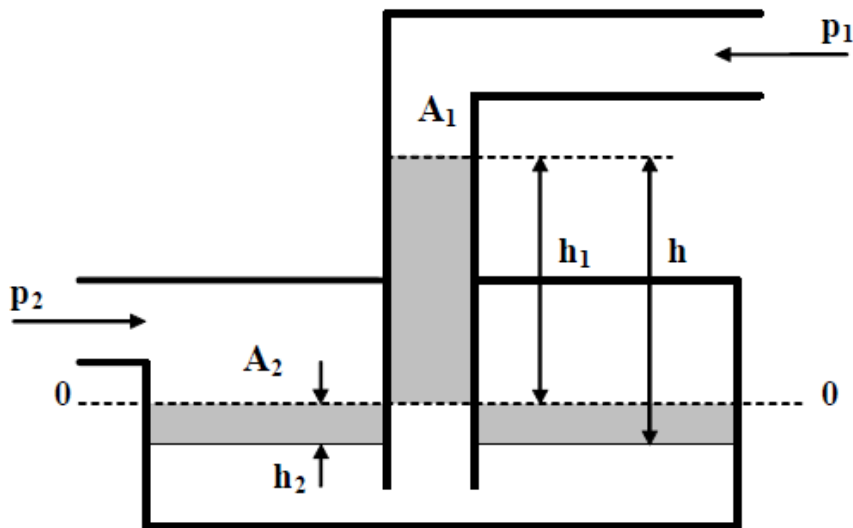
pa je:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = h_1 \left( 1 + \frac{A_1}{A_2} \right) \rho g$$

Ako je  $A_2 \gg A_1$  onda je  $h_2$  zanemarivo pa je  $h \cong h_1$  što daje:

$$\Delta p = p_2 - p_1 \cong h_1 \rho g \cong h \rho g$$

#### 6.2.4. Manometar s čašicom

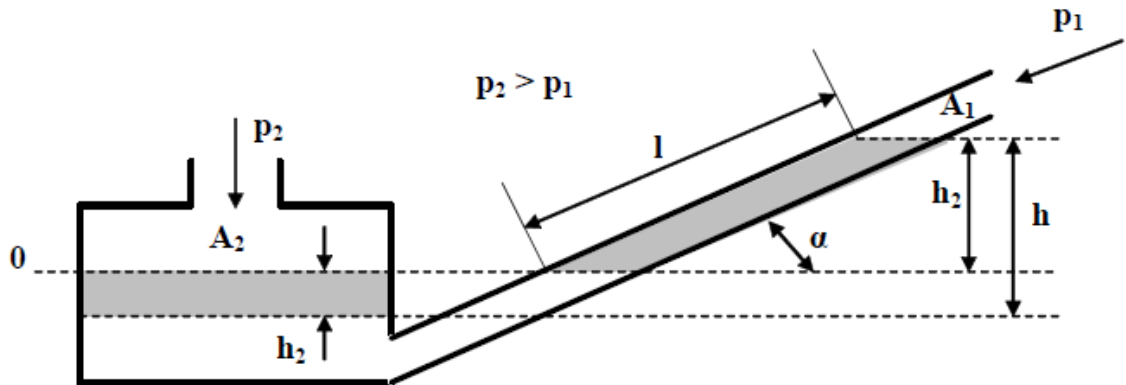


Slika 5 - Manometar s čašicom

Manometar s čašicom (Slika 5) radi u stvari kao U-manometar nesimetrične izvedbe, kod kojega je tanja cijev smještena u debljoj koja ima oblik čašice. Nesimetrija je ovdje jako naglašena tako da je  $A_2 \gg A_1$ . Na isti način može se dokazati da je  $\Delta p = p_2 - p_1 \cong h_1 \rho g \cong h \rho g$ .

Ova izvedba je pogodna za brzo određivanje razlike tlakova, jer je za to dovoljno samo jedno čitanje, ako se tolerira navedena pogreška.

### 6.2.5. Manometar s priklojenom cijevi (mikromanometar)



Slika 6 - Manometar s priklojenom cijevi

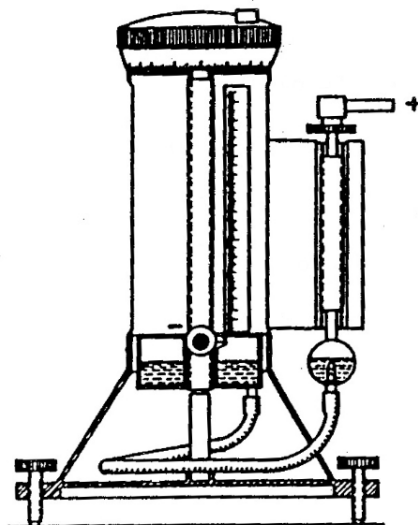
Manometar s priklojenom cijevi (Slika 6) služi za mjerenje vrlo malih tlakova. Cijev je priklojena pod kutem  $\alpha$  prema horizontali. Otklon u koso položenoj cijevi biti će proporcionalno uvećan sinusom kuta nagiba cijevi. Kada nastupi  $p_2 > p_1$  kapljevina daleko dopire u kosu cijev pa je već za male vrijednosti  $\Delta p$ ,  $l$  veliko, ako je kut priklona malen. Na sličan način kao i prije može se dokazati da je:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = l \left( \frac{A_1}{A_2} + \sin \alpha \right) \rho g \cong l \rho g \sin \alpha$$

Da bi postigli što veće osjetljivosti potrebno je kut priklona učiniti što manjim. Ako se želi čitati direktno na skali ( $l$ ) uz zanemarivu pogrešku tada treba udovoljiti uvjet da je  $A_2 \gg A_1$ . Za punjenje se obično uzima alkohol ili koja druga organska kapljevina.

Prednost ove izvedbe pred izvedbama s okomitim cijevima je ta što je ovdje pomak veći nego što je visina ( $h$ ) pri istoj razlici tlakova  $\Delta p$  pa se može koristiti dulja skala. Ovakvi kapljevinski manometri s priklojenom cijevi vrlo su prikladni i jednostavni. Ako se instrument izvede s promjenjivim nagibom cijevi i kućištem od kovine naziva se *mikromanometar*.

#### 6.2.6. Minimetar



*Slika 7 – Minimetar*

Minimetar se koristi kada su zahtjevi za točnost pri mjerenju malenih razlika tlakova naročito veliki. To je u stvari U-cijev u obliku dviju proširenih posuda, koje su međusobno spojene savitljivom cijevi. U fiksnoj proširenoj posudi, na koju se priključuje pretlak, nalazi se zlatni šiljak, koji pri izjednačenom tlaku, u nul položaju, upravo dodiruje razinu vode, kojom je napunjen instrument. Kada na instrument djeluje neka razlika tlaka podiže se druga posuda pomoću vretena sa vijkom sve dok opet šiljak upravo ne dosegne razinu vode. Ispravno podešavanje postiže se pomoću optičkog uređaja. Pošto u trenu očitavanja položaj razine vode ostaje isti, eventualne netočnosti u izvedbi instrumenta ili zbog kapilariteta nemaju utjecaj na točnost mjerenja. Pomoću mikrometarskog vijka mogu se razlike položaja razina vode očitavati vrlo precizno (u granicama 0,02 – 0,05 mm).



## **7. Mjerna nesigurnost**

### **7.1. Osnovni pojmovi**

#### **Mjerenje**

Svrha mjerenja je određivanje vrijednosti mjerene veličine, tj. vrijednosti posebne veličine koju treba mjeriti. Mjerni rezultat samo je približno određenje ili procjena vrijednosti mjerene veličine pa je prema tome potpun samo kad je praćen iskazom nesigurnosti te procjene. U praksi se zahtijevani točni opis ili određenje mjerene veličine propisuju zahtijevanom mjernom točnošću.

U mnogim slučajevima mjerni se rezultat određuje na temelju niza opažanja dobivenih u uvjetima ponovljivosti. Za promjene u opetovanim opažanjima smatra se da nastaju zbog utjecajnih veličina koje mogu djelovati na mjerni rezultat, a ne održavaju se u potpunosti stalnim. Matematički model mjerenja, kojim se skup opetovanih opažanja pretvara u mjerni rezultat od odlučne je važnosti budući da osim tih opažanja on uključuje i različite utjecajne veličine koje nisu točno poznate.

#### **Pogreške, djelovanja i ispravci**

U svakom mjerenju postoje nesavršenosti koje uzrokuju pogrešku u mjernom rezultatu. Pogreška se uobičajeno smatra sastavljenom od dviju sastavnica, slučajne i sustavne sastavnice.

Slučajne pogreške ne mogu se prepoznati i ne mogu se odrediti, pa se samim tim ne mogu niti otkloniti. Pojavljivanje slučajnih pogrešaka „pokorava“ se zakonu slučaja, tj. zakonu vjerojatnosti. Slučajne pogreške su prema zakonima statistike raspodjeljene oko neke vrijednosti, odnosno raspodjeljene su u određenom području. Interval koji je pokriven jednim dijelom cjelokupne raspodjele pogrešaka, i to sa specificiranom sigurnošću, naziva se interval tolerancije, a krajnje točke tog intervala granice tolerancije ili tolerancija. Za slučajnu pogrešku pretpostavlja se da nastaje iz nepredvidivih ili slučajnih vremenskih ili prostornih promjena utjecajnih veličina. Ta djelovanja uzrokuju promjene u opetovanim opažanjima mjerene veličine. Iako slučajnu pogrešku mjernog rezultata nije moguće poništiti, ona se obično može smanjiti povećanjem broja opažanja; njezino je očekivanje ili očekivana vrijednost jednaka nuli.

Sustavna pogreška također se ne može poništiti, ali se i ona često može smanjiti. Ako sustavna pogreška potječe od utvrđenog djelovanja utjecajne veličine na mjerni rezultat, to se djelovanje može količinski iskazati, i ako je značajno (po veličini) u odnosu na zahtijevanu mjernu točnost, može se da bi ga se poništilo, primijeniti ispravak ili faktor ispravka. Pretpostavka je da se nakon ispravka očekivanje ili očekivana vrijednost pogreške koja nastaje od sustavnog djelovanja jednaka nuli.

### **Nesigurnost**

Nesigurnost mjernog rezultata odražava manjak točnog znanja vrijednosti mjerene veličine. Mjerni rezultat je i nakon ispravka utvrđenih sustavnih djelovanja, zbog nesigurnosti koja potječe od slučajnih djelovanja i zbog nesavršenosti ispravka rezultata zbog sustavnih djelovanja, još uvijek samo procjena vrijednosti mjerene veličine.

*Mjerna nesigurnost* je parametar pridružen mjernom rezultatu koji opisuje rasipanje vrijednosti koje se mogu razumno pripisati mjerenoj veličini. Mjerna nesigurnost govori o kvaliteti mjerenja, odnosno predstavlja sumnju u rezultat bilo kojeg mjerenja. Mogla bi se odrediti i pokusima tako da se svaka od veličina koje utječu na mjerenu veličinu mijenja i da se potom statistički procjenjuje nesigurnost. Takav postupak traži vrijeme i novac i nije uobičajen. Obično se pretpostavlja matematički model ovisnosti mjerene veličine o utjecajnim veličinama i vjerojatnosna razdioba nesigurnosti. O tome koje sve veličine uzeti u obzir obično određuje tražena točnost mjerenja. Dva broja su potrebna da bi se mjerna nesigurnost kvantificirala:

- ŠIRINA INTERVALA
- NIVO POUZDANOSTI

### **Izvori mjerne nesigurnosti**

- MJERNI INSTRUMENT – instrumenti su podložni pogreškama kao nestalnost, trošenje, pomaci, slaba rezolucija, šum, interpolacija
- OBJEKT MJERENJA – možda nije stabilan, ima slabu rezoluciju, ponovljivost, histerezu, pomak nule, nelinearnost
- MJERNA METODA – poteškoće u mjerenju, gradijenti, nestalnosti, živi uzorci
- „UVEZENE“ NESIGURNOSTI – nesigurnost umjerenih instrumenata ugrađuje se u nesigurnost mjerenja koje se sa njima provodi (ali nesigurnost zbog neumjerenih instrumenata bila bi puno veća)
- VJEŠTINA MJERITELJA – neka mjerenja ovise o vještini i prosudbi mjeritelja. Jedna osoba može biti pogodnija od druge za pripremu i provedbu osjetljivih mjerenja te imati oštrije oko za fina očitavanja (grube pogreške se ne ubrajaju u mjernu nesigurnost).
- UZORKOVANJE – mjerenja koja se provode moraju dobro reprezentirati proces koji se ispituje
- PARAMETRI OKOLINE – temperatura, barometarski tlak, vlažnost i drugi uvjeti mogu utjecati na mjerni instrument ili predmet ispitivanja.

*Standardna nesigurnost* je nesigurnost rezultata izražena kao standardno odstupanje.

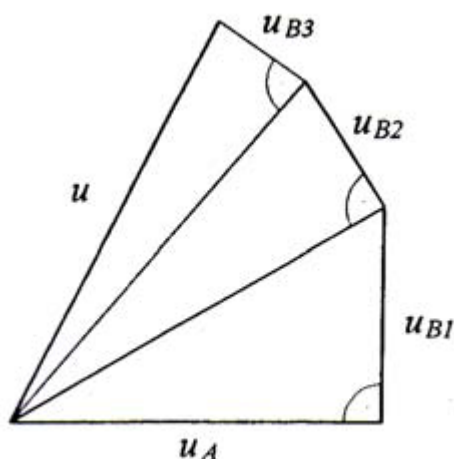
Mjerna nesigurnost pridružena procjenama ulazne veličine određuje se u skladu s metodom određivanja „A vrste“ ili „B vrste“. Svrha razvrstavanja na sastavnice „A vrste“ i „B vrste“ je da se pokažu dva načina proračuna sastavnica nesigurnosti i služi samo za olakšanje rasprave. Obje vrste proračuna temelje se na razdiobama vjerojatnosti, a sastavnice nesigurnosti količinski se iskazuju varijancijama ili standardnim odstupanjima. Standardna nesigurnost A vrste dobiva se iz funkcije gustoće vjerojatnosti izvedene iz opažanjem dobivene razdiobe čestota, dok se standardna nesigurnost B vrste dobiva iz pretpostavljene funkcije gustoće vjerojatnosti, koja se temelji na stupnju uvjerenja da će se kakav događaj zbiti.

*Određivanje standardne nesigurnosti A vrste* je metoda određivanja nesigurnosti statističkom analizom niza opažanja. U tom slučaju standardna je nesigurnost eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti koji se dobiva uprosječenjem ili odgovarajućom regresijskom analizom.

*Određivanje standardne nesigurnosti B vrste* metoda je određivanja nesigurnosti na način koji se razlikuje od statističke analize niza opažanja. U tom se slučaju određivanje standardne nesigurnosti temelji na nekim drugim znanstveno utvrđenim metodama.

*Ukupna nesigurnost* jednaka je drugom korijenu iz zbroja kvadrata pojedinih komponenata:

$$u = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$$



Slika 8 - Ukupna nesigurnost kao geometrijski zbroj svih komponenata nesigurnosti

## 7.2. Određivanje standardne nesigurnosti A vrste

Određivanje vrijednosti standardne nesigurnosti metodom A vrste može se primjenjivati kad je provedeno više neovisnih opažanja jedne ulazne veličine pod istim mjernim uvjetima. Ako postoji dostatno razlučivanje u mjernom procesu, tada će postojati primjetno rasipanje ili raspršenje dobivenih vrijednosti.

Ako pretpostavimo da je opetovano mjerena ulazna veličina  $X_i$  jednaka veličini  $Q$ . S  $n$  statistički neovisnih opažanja ( $n > 1$ ) procjena veličine  $Q$  jednaka je  $q$ , aritmetičkoj sredini ili prosjeku tih pojedinačnih opaženih vrijednosti  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ):

Izražavanje mjerne nesigurnosti pri umjeravanju:

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j$$

Mjerna nesigurnost pridružena procjeni  $q$  usklađuje se u skladu s jednom od ovih metoda:

- Procjena varijancije navedene razdiobe vjerojatnosti jednaka je **eksperimentalnoj varijanciji**  $s^2(q)$  vrijednosti  $q_j$  koja je dana izrazom:

$$s^2(q) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2$$

Njezin (pozitivni) drugi korijen naziva se **eksperimentalnim standardnim odstupanjem**. Najveća procjena varijancije aritmetičke sredine  $q$  jednaka je **eksperimentalnoj varijanciji srednje vrijednosti**:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q)}{n}$$

Njezin (pozitivni) drugi korijen naziva se **eksperimentalnim standardnim odstupanjem srednje vrijednosti**. Standardna nesigurnost  $u(q)$  pridružena procjeni ulazne veličine  $q$  eksperimentalno je standardno odstupanje srednje vrijednosti

$$u(\bar{q}) = s(\bar{q})$$

- Za mjerenja koja su dobro opisana i pod statističkim nadzorom može biti na raspolaganju sastavljena procjena varijancije dobivena iz skupa podataka  $sp^2$  koja prikazuje rasipanje bolje od procijenjenoga standardnog odstupanja dobivena iz ograničena broja opažanja. Ako se u tom slučaju vrijednost ulazne veličine  $Q$  određuje kao aritmetička sredina  $q$  maloga broja  $n$  neovisnih opažanja, varijancija srednje vrijednosti može se procijeniti s pomoću izraza:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s_p^2}{n}$$

### 7.3. Određivanje standardne nesigurnosti B vrste

Određivanje standardne nesigurnosti B vrste određivanje je nesigurnosti pridružene kakvoj procjeni  $x_i$  ulazne veličine  $X_i$  s pomoću metoda različitih od statističke analize niza opažanja. Standardna nesigurnost  $u(x_i)$  određuje se znanstvenom prosudbom koja se temelji na svim raspoloživim podacima o mogućoj promjenljivosti veličine  $X_i$ . Vrijednosti koje pripadaju toj kategoriji mogu se izvoditi iz:

- podataka dobivenih iz prijašnjih mjerenja
- iskustva s gradivima i mjerilima ili poznavanja ponašanja i svojstava bitnih gradiva i mjerila otprije
- proizvođačkih specifikacija
- podataka dobivenih umjeravanjem i podataka iz drugih potvrda o umjeravanju
- nesigurnosti pridruženih referencijskim podacima uzetim iz priručnika.

Ispravna uporaba dostupnih podataka za određivanje standardne mjerne nesigurnosti B vrste zahtijeva oštroumnost koja se temelji na iskustvu i općem znanju. To se stječe praksom. Dobro utemeljeno određivanje standardne nesigurnosti B vrste može biti isto tako pouzdano kao i određivanje standardne nesigurnosti A vrste posebno u slučajevima gdje se određivanje A vrste, temelji samo na razmjerno malom broju statistički neovisnih opažanja. Moraju se odvojiti ovi slučajevi:

- kad je poznata **samo jedna vrijednost** veličine  $X_i$ , npr. jedna izmjerena vrijednost, vrijednost kojeg rezultata prijašnjeg mjerenja, kakva referencijska vrijednost iz literature ili vrijednost ispravka, ta se vrijednost upotrebljava za procjenu  $x_i$  ulaznih veličina. Standardna nesigurnost  $u(x_i)$  pridružena  $x_i$  mora se prihvatiti gdje je dana. Inače se ona treba izračunati iz nedvosmislenih podataka o nesigurnosti. Ako podaci te vrste ne postoje, nesigurnost treba odrediti na temelju iskustva.
- kad se na temelju teorije ili iskustva za veličinu  $X_i$  može pretpostaviti razdioba vjerojatnosti, tada kao procjenu  $x_i$  ulazne veličine i pridruženu standardnu nesigurnost  $u(x_i)$  treba uzeti redom odgovarajuće očekivanje ili očekivanu vrijednost i drugi korijen varijancije te razdiobe.

- ako se mogu procijeniti samo gornja i donja granica  $a_+$  i  $a_-$  vrijednosti veličine  $X_i$  (npr. proizvođačke specifikacije mjerila, temperaturno područje, zaokruživanje ili odbacivanje automatskim smanjenjem podataka), za moguće vrijednosti ulazne veličine  $X_i$  treba se pretpostaviti razdioba vjerojatnosti sa stalnom gustoćom vjerojatnosti između tih granica (pravokutna razdioba vjerojatnosti). U skladu s drugim slučajem za procijenjenu se vrijednost dobiva:

$$x_i = \frac{1}{2}(a_+ + a_-)$$

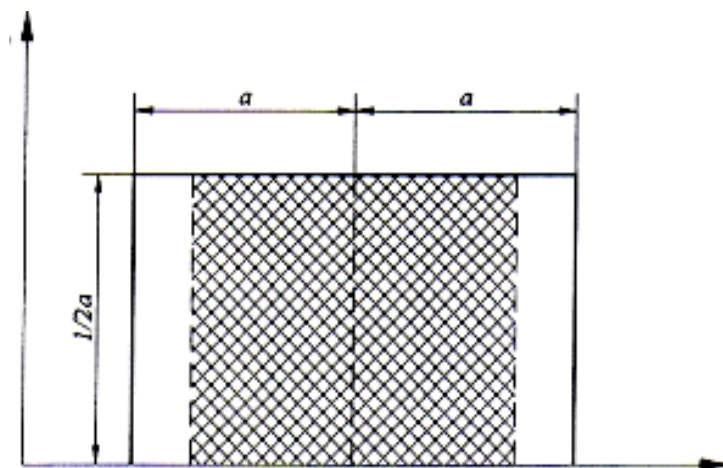
a za kvadrat standardne nesigurnosti:

$$u^2(x_i) = \frac{1}{12}(a_+ - a_-)^2$$

Ako se s 2a označi razlika između graničnih vrijednosti, gornja jednadžba daje rezultat:

$$u^2(x_i) = \frac{1}{3}a^2$$

Pravokutna razdioba razuman je vjerojatnosni opis neodgovarajućeg znanja o ulaznoj veličini  $X_i$  u nedostatku drugih podataka osim njezinih granica promjenljivosti. Ali ako je poznato da su vrijednosti te veličine koje su bliže središtu intervala promjenljivosti vjerojatnije od vrijednosti bližih granicama, bolji model može biti trokutna ili normalna razdioba. S druge strane, ako su vrijednosti bliže tim granicama vjerojatnije od vrijednosti koje su bliže središtu, može biti prikladnija razdioba koja ima oblik slova U.



Slika 9 - Pravokutna razdioba

#### 7.4. Postupak za izračunavanje mjerne nesigurnosti

- Matematički izraziti ovisnost mjerene veličine (izlazne veličine)  $Y$  o ulaznim veličinama  $X_i$  u skladu s jednadžbom  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . U slučaju izravne usporedbe dvaju etalona ta jednadžba može biti veoma jednostavna, npr.  $X = X_1 + X_2$ .
- Utvrditi i primijeniti sve važne ispravke.
- Sastaviti popis svih izvora nesigurnosti u obliku analize nesigurnosti. Treba pokušati sagledati sve što utječe na mjerenje (mjerni instrument, pomoćna oprema, objekt mjerenja, metoda mjerenja, nesigurnosti samih mjerila, način na koji je objekt odabran za mjerenje, uvjeti okoliša i drugo)
- Za veličine koje se opetovano mjere u skladu s određivanjem mjerne nesigurnosti A vrste izračunati standardnu nesigurnost  $u(q)$ .
- Za pojedinačne vrijednosti uzimati standardne nesigurnosti kad su one dane ili kad se mogu izračunati. Obratiti pozornost na upotrijebljeno prikazivanje nesigurnosti. Ako ne postoje potrebni podaci iz kojih se može izvesti standardna nesigurnost, vrijednost standardne nesigurnosti  $u(x_i)$  iskažite na temelju znanstvenog iskustva.
- Za ulazne veličine za koje je poznata ili se može pretpostaviti razdioba vjerojatnosti izračunati očekivanje i standardnu nesigurnost  $u(x_i)$ .
- Za svaku ulaznu veličinu  $X_i$  izračunati doprinos  $u_i(y)$  nesigurnosti pridružene procjeni izlazne veličine koja nastaje iz procjene  $x_i$  ulazne veličine i zbrojiti njihove kvadrate kako bi se dobio kvadrat standardne nesigurnosti  $u(y)$  mjerene veličine.

## PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM MANOMETRIMA

---

- Izračunati povećanu nesigurnost  $U$  množidbom standardne nesigurnosti  $u(y)$  pridružene procjeni ulazne veličine faktorom pokrivanja  $k$ .
- Iskazati mjerni rezultat procjene  $y$  mjerene veličine pridružene povećanoj nesigurnosti  $U$  i faktor pokrivanja  $k$  u potvrdi o umjeravanju.

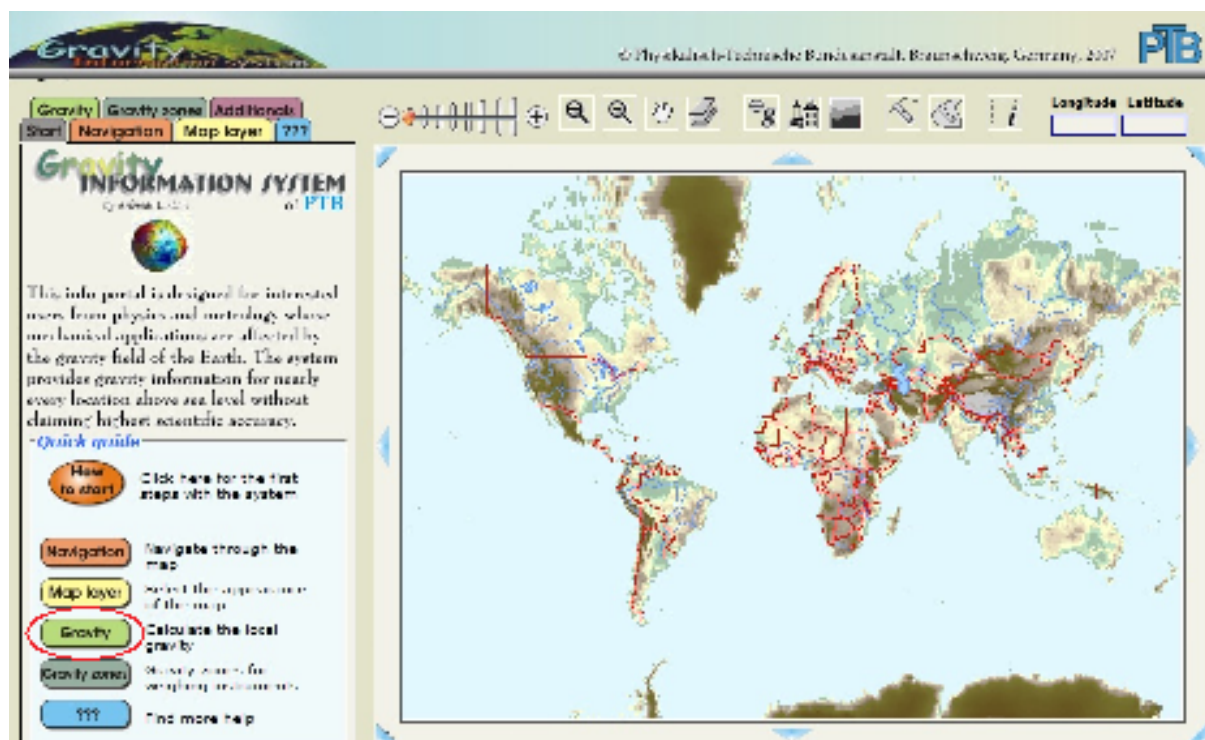


## 8. Rezultati

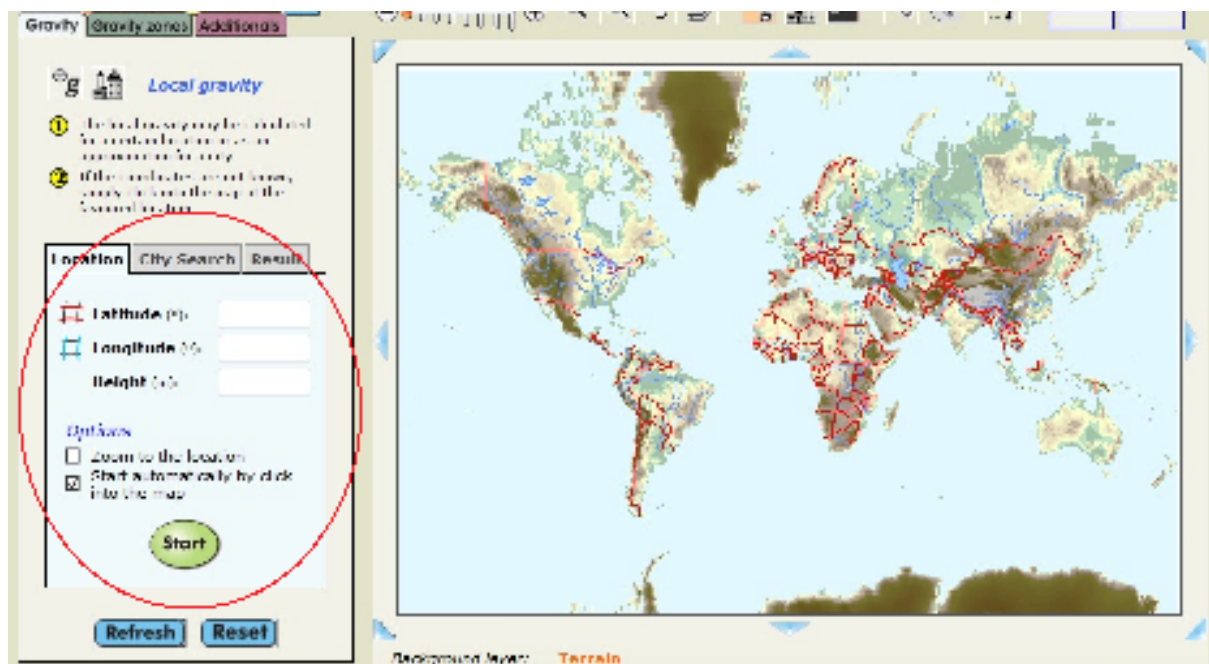
### 8.1. Rezultati mjerenja gravitacije

Da bi se dobila vrijednosti tlaka mora se poznavati vrijednost gravitacije. Gravitaciju LPM-a je izračunata pomoću PTB metode, pet različitih univerzalnih formula gravitacije, pomoću formule sa internet stranice NPL-a(): [http://www.npl.co.uk/reference/faqs/how-can-i-determine-my-local-values-of-gravitational-acceleration-and-altitude-\(faq-mass-and-density\)](http://www.npl.co.uk/reference/faqs/how-can-i-determine-my-local-values-of-gravitational-acceleration-and-altitude-(faq-mass-and-density)) te je u proračun gravitacije ubačena i vrijednost gravitacije dobivenu mjernjem 1999. godine u LPM-u na fakultetu od strane Geofizike. Nakon što se odredi svaka vrijednosti i mjernu nesigurnost za svaku vrijednost, izračuna se srednju vrijednost gravitacije koju se koristi u proračunu tlaka.

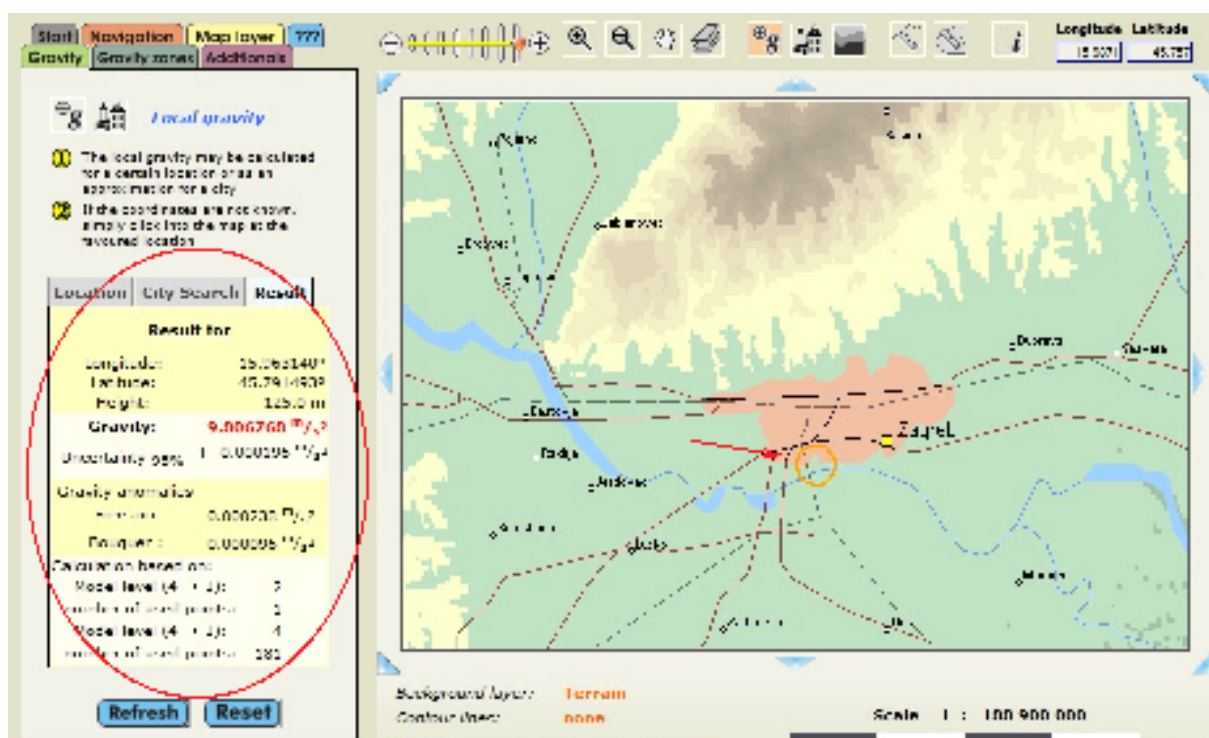
Prva metoda kojom se odredi gravitacija je PTB metoda. Na internet stanici PTB-a(Physikalisch-Technische Bundesanstalt): <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php> gravitacija se izračuna tako da se odredi približna lokacija LPM-a na karti i program sam izračuna kolika je tu gravitacija sa pripadajućom nesigurnošću.



Slika 10 - PTB metoda izračuna gravitacije



Slika 11 – Unos podataka kod PTB metode



Slika 12 – Dobivena vrijednost gravitacije PTB metodom

Druga metoda za izračun gravitacije je metoda pomoću univerzalne formule gravitacije. Najprije se u programu „google earth“ pronade lokacija za koju se želi izračunati gravitacija, u ovom slučaju lokacija LPM-a, te se zapišu njene koordinate (45°47'44.52"). Nakon toga se očitane koordinate uvrste u svaku od univerzalnih formula gravitacije te se izračuna vrijednost gravitacije za tu metodu. Zanimljivo je da niti jedna od tih formula gravitacije ne uzima kao faktor nadmorsku visinu točke mjerenja.

Slijedeću vrijednost gravitacije se računa koristeći formulu gravitacije sa internet stranice NPL-a ([http://www.kayelaby.npl.co.uk/general\\_physics/2\\_7/2\\_7\\_5.html](http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_7/2_7_5.html)), koja kao faktor koristi i nadmorsku visinu:

$$g = g_e(1 + \beta_1 \cdot \sin^2 \vartheta - \beta_2 \cdot \sin^2 2\vartheta) - 3,088 \times 10^{-6} H$$

U ovoj jednadžbi  $\vartheta$  predstavlja geografsku širinu,  $H$  je nadmorska visina (u metrima) a  $g_e$  je vrijednost gravitacije na ekvatoru. Preporučene vrijednosti od *International Union of Geodesy and Geophysics* su:

- $g_e = 9,780327 \text{ m/s}^2$
- $\beta_1 = 0,0053024$
- $\beta_2 = 0,0000058$

Posljednju vrijednost gravitacije vrijednost gravitacije koja je uzeta u proračun je gravitacija koja je 1999. godine izmjerena za LPM.

Univerzalne formule gravitacije koje su korištene u tablici 1 su:

1) 1930. Potsdam:

$$g = 9,78049(1 + 0,0052884 \cdot \sin^2 \vartheta - 0,0000059 \cdot \sin^2 2\vartheta)$$

2) Robinson & Coruh:

$$g = 9,78031846(1 + 0,005278895 \cdot \sin^2 \vartheta + 0,000023462 \cdot \sin^4 \vartheta)$$

3) Dobrin & Savit:

$$g = 9,78032 \frac{(1 + 0,0019316633821 \cdot \sin^2 \vartheta)}{\sqrt{1 - 0,00669460532856 \cdot \sin^2 \vartheta}}$$

4) Sharma:

$$g = 9,780318(1 + 0,0053024 \cdot \sin^2 \vartheta - 0,0000059 \cdot \sin^2 2\vartheta)$$

5) 1984. Blakely:

$$g = 9,78033 \frac{(1 + 0,00193185138639 \cdot \sin^2 \vartheta)}{\sqrt{1 - 0,00669437999013 \cdot \sin^2 \vartheta}}$$

PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

---

*Tablica 1 - Vrijednosti gravitacije*

Metode	Gravitacija (g)	Mjerna nesigurnost (u)
PTB metoda	9.806768 m/s <sup>2</sup>	95% $\pm$ 0.000196 m/s <sup>2</sup>
Univerzalna formula		
1930. Potsdam	9.8067222 m/s <sup>2</sup>	
Robinson & Coruh	9.8066199 m/s <sup>2</sup>	
Dobrin & Savit	9.8066199 m/s <sup>2</sup>	
Sharma	9.8066193 m/s <sup>2</sup>	
1984. Blakely	9.8066286 m/s <sup>2</sup>	
NPL	9.8062433 m/s <sup>2</sup>	95% $\pm$ 0.0001 m/s <sup>2</sup>
Geofizika	9.806218496 m/s <sup>2</sup>	95% $\pm$ 0.0001 m/s <sup>2</sup>
Srednja vrijednost gravitacije →	9.806555 m/s <sup>2</sup>	

# PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM MANOMETRIMA



## GEOFIZIKA

POSREDOVANJE IZ OBLASTI GEOFIZIKE I INŽINJERINGA

Savska c. 64, 10000 ZAGREB, Hrvatska  
P.p. 208, 10000 Zagreb  
Telefon: 61-76-111 • 61-76-237 (direktor)  
Telefaks: 61-76-252  
E-mail: geofizika@zetnet.hr

Fakultet strojarstva i brodogradnje  
Sveučilište u Zagrebu  
Lužička 5/II  
Zagreb  
gdi. Lovorka Gregor Herceg

Zagreb, 11.11.1999.

Na naš zahtjev / Dopis - fax od 13.10.1999. / izvršili smo proračun vrijednosti sile teže za poziciju, koja se nalazi neposredno uz Vašu fakultet. Njene koordinate /pozicija/ su sljedeće:

$X = 5\ 073\ 070$        $\Phi = 45^{\circ} 47' 52,6523'' \approx 45,797959^{\circ}$

$Y = 5\ 575\ 850$        $\lambda = 15^{\circ} 58' 33,1438''$

$H = 115,24\text{ m}$

U proračun je uključena:

- 1) Vrijednost pozicije na geoidu,  $G_0$
- 2) Vrijednost pripadne Bouguerove anomalije,  $BA$
- 3) Korekcije za visinu koške, Fayerova korekcija
- 4) Korekcija za gustoću sloja između geoida i kote, Bouguerova korekc.

Izračunata vrijednost iznosi:

$G = 980,6218496\text{ gala ( cm/sek}^2\text{)}$

Troćna decimala je nepouzdana, jer nisu uzete u obzir:

- 1) Topografske karakteristike, odnosno utjecaj mase susjednog masiva Medvodnice.
- 2) Lunisolarne korekcije, zbog utjecaja sile teže Mjeseca i Sunca, koji dnevno osciliraju unutar 0,6 miligama ili 0,0006 gala.
- 3) Razliku stvarne i odabrane pozicije i visine Vašeg laboratorija, koje iznose oko 2 miligama.

L'koliko ovaj podatak nije dovoljno precizan za Vaše potrebe, predatoje nam obimna terenska mjerenja

Dr. ing. Bruno Aljinović



## 8.2. Rezultati laboratorijskog mjerenja

Laboratorijsko mjerenje obavljeno je u laboratoriju za procesna mjerenja. Zadatak ovog rada bio je umjeriti pretvornik tlaka. Pretvornici tlaka su instrumenti koji pretvaraju mjereni tlak u električni signal koji je proporcionalan mjerenom tlaku.

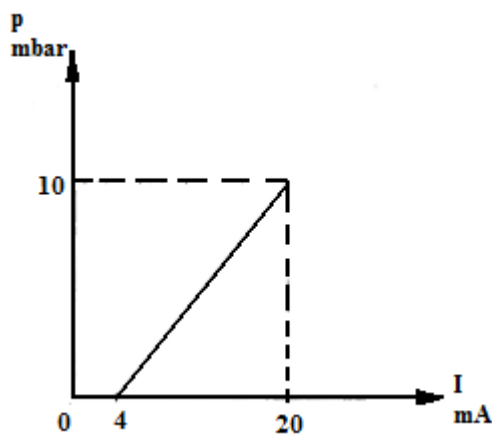
Ovisno o modelu izlazni signal može biti:

- Struja
- Napon
- Frekvencija

U ovom slučaju korišten je pretvornik tlaka sa strujnim izlaznim signalom (4-20 mA). Pretvornik je umjeravan pomoću kalibratora tlaka i minimetra. Umjeravanje se provelo u 11 točaka u tri smjera. Prvi smjer je bio od 0 do 10 mbar, drugi od 10 do 0 mbar i treći od 0 do 10 mbar. Rezultate mjerenja sam upisao u tablicu br.

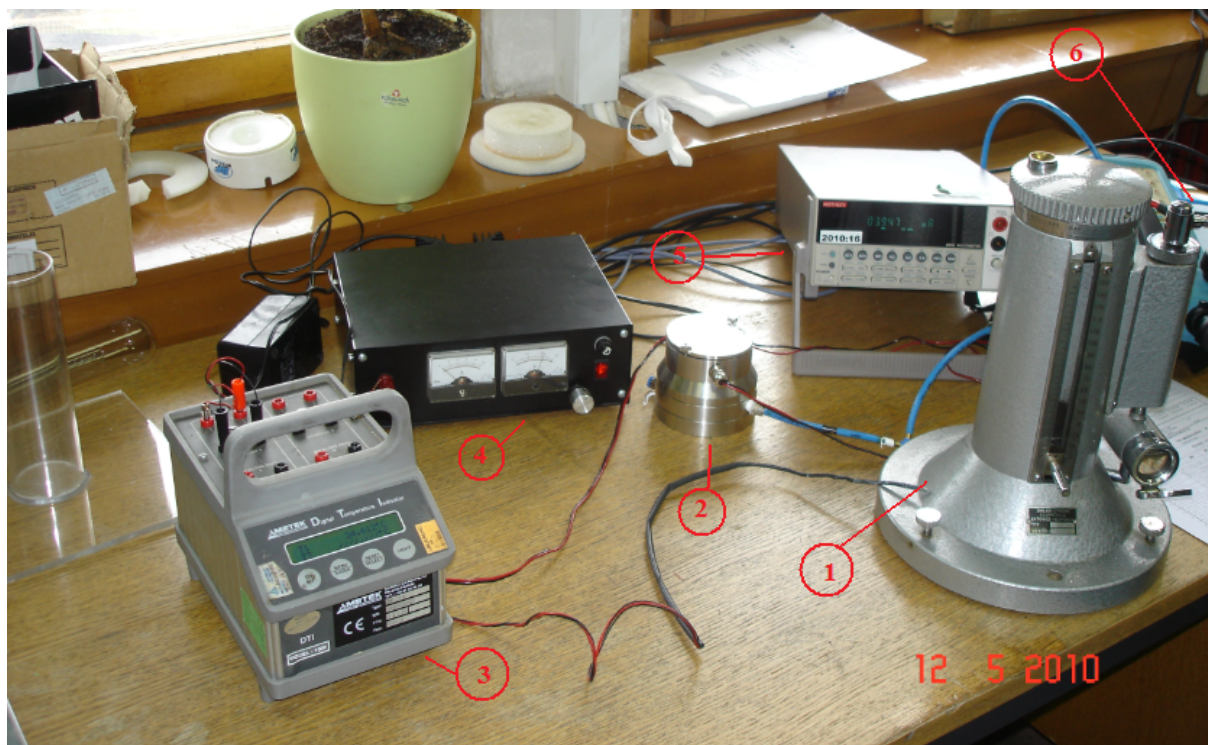
Tlak se u ovom slučaju računa iz linearne ovisnosti tlaka o izmjenom strujnom signalu:

$$p = [(p_{max} - p_{min}) / (20 - 4)] (i - 4) + p_{min} = (\Delta p / 16) (i - 4) + p_{min}$$



Slika 13 - Linearna ovisnost tlaka o strujnom signalu





*Slika 14 - Mjerna linija*

Dijelovi mjerne linije:

- 1) Minimetar: Zakłady-Cynkowe Szopienice,  
Katowice-Szopienice  
Tip: MK-1  
Tvornički broj: 511
- 2) Pretvornik: GE Druck  
LPX 9381  
Raspon: 0 do 10 mbar  
Izvor: 10 do 30 Vdc  
Izlaz: 4 do 20 mA
- 3) Digitalno mjerilo temperature: Digital temperature indicator  
Ametek Jofra instruments  
Tip: DTI 1000  
V-Hz: 8x1.5 V
- 4) Izvor napona
- 5) Digitalni multimetar: Keithley  
2010 Multimeter

6) Kalibrator: Oznaka: TLKAL 02

DPI 615 pressure calibrator

20 bar g





PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

*Tablica 2 – Usporedba tlaka dobivenog laboratorijskim mjerenjem i tlaka izračunatog programom u excelu*

Očitanje	$p_n$	$p_s$	$p_n - p_s$
[mm]	[mbar]	[mbar]	[mbar]
0	0,0119	0	0,012
10	0,994	0,977	0,017
20	1,972	1,954	0,018
30	2,951	2,931	0,02
40	3,93	3,908	0,022
50	4,908	4,885	0,023
60	5,888	5,862	0,026
70	6,869	6,839	0,03
80	7,848	7,816	0,032
90	8,829	8,793	0,036
100	9,806	9,77	0,036

*Tablica 3 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 0$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	0	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0	0
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	0	0
					$u_e$	0.564 Pa

*Tablica 4 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 10$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	10	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.09806555	0.1132
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	9.97043	0.004606
					$u_e$	0.575 Pa

PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

*Tablica 5 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 20$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	20	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.19613	0.2265
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	19.94	0.009212
					$u_e$	0.608 Pa

*Tablica 6 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 30$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	30	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.2942	0.3397
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	29.91	0.01382
					$u_e$	0.658 Pa

*Tablica 7 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 40$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	40	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.3923	0.453
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	39.88	0.01842
					$u_e$	0.724 Pa

PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

*Tablica 8 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 50 \text{ mm}$*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	50	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.4903	0.566
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	49.852	0.02303
					$u_e$	0.799 Pa

*Tablica 9 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 60 \text{ mm}$*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	60	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.5884	0.6794
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	59.82	0.0276
					$u_e$	0.883 Pa

*Tablica 10 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 70 \text{ mm}$*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	70	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.6865	0.7927
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	69.793	0.03224
					$u_e$	0.973 Pa

PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

*Tablica 11 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 80$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	80	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.7845	0.9059
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	79.76	0.03685
					$u_e$	1.0677 Pa

*Tablica 12 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 90$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	90	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.8826	1.0191
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	89.734	0.04146
					$u_e$	1.165 Pa

*Tablica 13 – Mjerna nesigurnost točke očitavanja  $h = 100$  mm*

Utjecajna veličina	Iznos	Nesigurnost utj. veličine	Faktor razdiobe	Standardno odstupanje	Koeficijent osjetljivosti	Standardno odst. tlaka
	$x_i$	$2a$		$u_{x_i}$	$\partial p / \partial x_i$	$\partial p / \partial x_i \cdot u_{x_i}$
$h$	100	0.1 mm	$\sqrt{3}$	0.0000577	9777.56	0.564
$\rho$	997.043	2 kg/m <sup>3</sup>	$\sqrt{3}$	1.1547	0.9806555	1.132
$g$	9.806555	0.0008 m/s <sup>2</sup>	$\sqrt{3}$	0.000462	99.704	0.04606
					$u_e$	1.265 Pa

PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM  
MANOMETRIMA

*Tablica 14 – Mjerna nesigurnost histereze*

Očitavanje	Histereza	Faktor razdiobe	Nesigurnost ( $u_h$ )	$u_h^2$
[mm]	[mbar]		[mbar]	
0	0.0188	$\sqrt{3}$	0.005427	0.00002945
10	0.0144	$\sqrt{3}$	0.004157	0.0000173
20	0.0112	$\sqrt{3}$	0.003233	0.00001045
30	0.0094	$\sqrt{3}$	0.00271	0.00000734
40	0.0119	$\sqrt{3}$	0.003435	0.0000118
50	0.0062	$\sqrt{3}$	0.001789	0.0000032
60	0.0125	$\sqrt{3}$	0.00361	0.00001303
70	0.0063	$\sqrt{3}$	0.00182	0.00000331
80	0	$\sqrt{3}$	0	0
90	0	$\sqrt{3}$	0	0
100	0	$\sqrt{3}$	0	0

Mjerna nesigurnost rezolucije mjernog instrumenta je jednaka za sve točke. Ona ovisi o rezoluciji mjernog instrumenta, te ako smo za vrijednost rezolucije minimetra uzeli 0.001 mbar dobivena vrijednost nesigurnosti zbog rezolucije mjernog instrumenta iznosi:

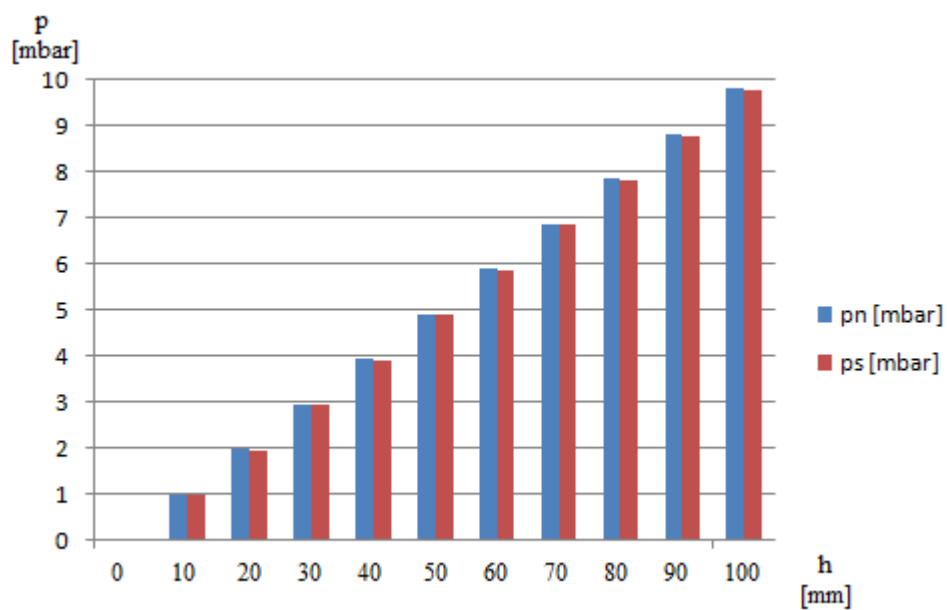
$$u_R = 0.001/\sqrt{3} = 0.0005774 \text{ mbar}$$

odnosno:

$$u_R^2 = 0.000000333 \text{ mbar}$$

*Tablica 15 – Proširena mjerna nesigurnost*

Očitavanje	Mjerna nesigurnost	Koeficijent proširenja	Proširena nesigurnost
[mm]	[mbar]		[mbar]
0	0.00785	2	0.0157
10	0.00712	2	0.01424
20	0.00691	2	0.0138
30	0.00714	2	0.0143
40	0.00803	2	0.01606
50	0.00821	2	0.0164
60	0.00956	2	0.01912
70	0.00991	2	0.0198
80	0.0107	2	0.0214
90	0.01169	2	0.0234
100	0.0127	2	0.0254

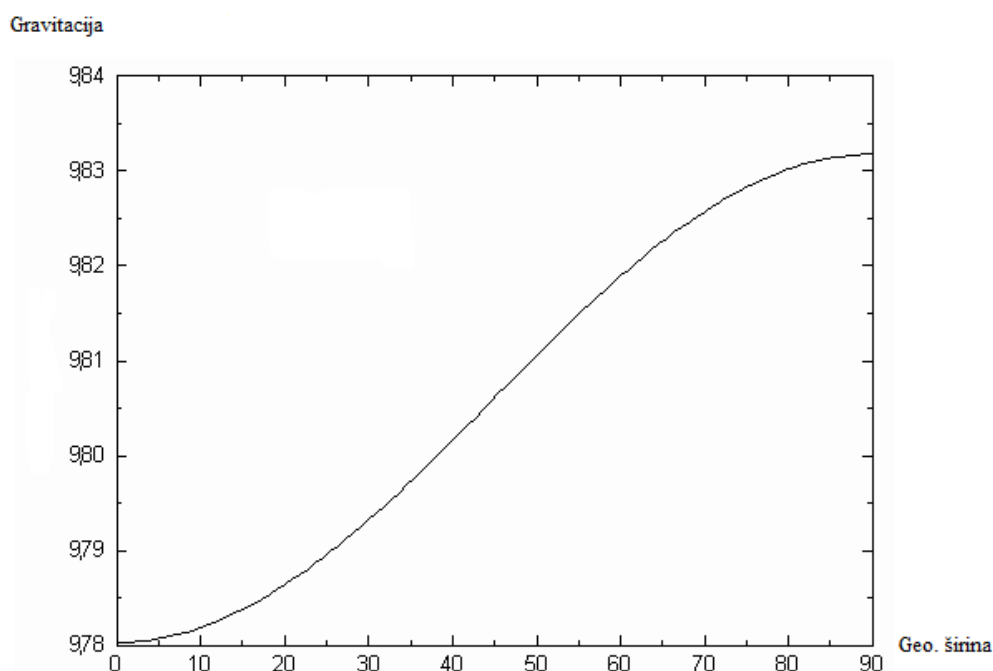


*Slika 15 - Ovisnost očitavanja na minimetru o tlaku*

## 9. Zaključak

Cilj ovog rada bio je pobliže upoznavanje sa metodama mjerenja tlaka cijevnim manometrima, te sa vrstama cijevnih manometara. Tu smo se usredotočili na kapljevinske manometre, u koje ubrajamo Torricelliev manometar, U-manometar, U-manometar nesimetrične izvedbe, Manometar s čašicom, Manometar s priklonjenom cijevi te Minimetar.

U ovom radu također je opisan i način određivanja gravitacije i tu je važno naglasiti da ubrzanje zemljine teže ( $g$ ) ovisi o geografskoj širini i nadmorskoj visini. Zbog ovog razloga se za točnija mjerenja vrijednost gravitacije ne smije smatrati konstantnom. Do sada nije zapažena promjena gravitacije na jednom te istom mjestu te se za jednom određenu vrijednost za to mjesto može smatrati konstantnom u svim uvjetima mjerenja.



*Slika 16 - Promjena gravitacije s obzirom na geografsku širinu*

Važno je naglasiti da manometri s kapljevinom podliježu gravitacijskim utjecajima kako se mijenja mjereno mjesto.

Za potrebe ovog rada razvijena je aplikacija u excelu. Riječ je o aplikaciji namijenjenoj za izračun tlaka pomoću minimetra i mikromanometra u kojoj se uz podatke o vrsti medija u manometru, temperaturi tog medija, očitanoj visini na manometru, temperaturi i tlaku zraka u prostoru, vrsti materijala od kojeg je načinjena mjerna skala, te kod mikromanometra ovisno o kutu prema horizontali računa tlak u  $Pa$  odnosno u  $mbar$ .



# PROCJENA MJERNE NESIGURNOSTI KOD MJERENJA TLAKA CIJEVNIM MANOMETRIMA

## Izračun tlaka kod mjerenja mikromanometrom

Upiši: 0 za živu  
 1 za vodu  
 2 za alkohol

Temperatura  $\vartheta = 24$  °C >Gustoća  $\rho = 0,997294$  g/cm<sup>3</sup> = 997,294 kg/m<sup>3</sup>

Očitana visina  $l_a = 100$  mm = 0,1 m

Gravitacija  $g = 9,806555$  m/s<sup>2</sup>

Temperatura zraka  $\vartheta_z = 20$  °C  
 Apsolutni tlak  $p_a = 990$  mbar >Gustoća zraka  $\rho_g = 1,177$  g/cm<sup>3</sup> = 1177 kg/m<sup>3</sup>

Referentna temperatura  $\vartheta_r = 0$  °C

Kut prema horizontali  $\beta = 30$  ° = 0,523598776 rad

Bronca=1  
 Odaberi-> Čelik =2 3  
 Staklo =3

$\alpha = 8,5E-06$  1/°C >linearni koeficijent širenja

TLAK>  $p = 488,5236$  Pa = 4,885235635 mbar

Slika 17 - Izračun tlaka kod mjerenja mikromanometrom

## Izračun tlaka kod mjerenja minimetrom

Upiši: 0 za živu  
 1 za vodu  
 2 za alkohol

Temperatura  $\vartheta = 24$  °C >Gustoća  $\rho = 0,997294$  g/cm<sup>3</sup> = 997,294 kg/m<sup>3</sup>

Očitana visina  $l_a = 100$  mm = 0,1 m

Gravitacija  $g = 9,806555$  m/s<sup>2</sup>

Temperatura zraka  $\vartheta_z = 20$  °C  
 Apsolutni tlak  $p_a = 990$  mbar >Gustoća zraka  $\rho_g = 1,177$  g/cm<sup>3</sup> = 1177 kg/m<sup>3</sup>

Referentna temperatura  $\vartheta_r = 0$  °C

Bronca=1  
 Odaberi-> Čelik =2 3  
 Staklo =3

$\alpha = 8,5E-06$  1/°C >linearni koeficijent širenja

TLAK>  $p = 977,0471$  Pa = 9,770471271 mbar

Slika 18 - Izračun tlaka kod mjerenja minimetrom

Za položaj LPM-a određena je vrijednost gravitacije na temelju nekoliko metoda, odnosno formula. Vrijednosti gravitacije se za koordinate LPM-a kreće se od 9.806218496 do 9.806768 m/s<sup>2</sup>. Kao konačna (odabranu) vrijednost gravitacije je odabrana vrijednost 9.806555 m/s<sup>2</sup>.

## 10. Literatura

- [1] Državni zavod za normizaciju i mjeriteljstvo: „Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti“, Zagreb, 1995.
- [2] Stephanie Bell: „A Beginner`s guide to uncertainty of measurement“
- [3] Physikalisch – Technische Bundesanstalt: „PTB testing instructions“
- [4] The Institute of Measurement and Control: „Guide to the Measurement of Pressure and Vacuum
- [5] <http://www.ptb.de/cartoweb3/SISproject.php> , 14. travnja 2010.
- [6] [http://www.npl.co.uk/reference/faqs/how-can-i-determine-my-local-values-of-gravitational-acceleration-and-altitude-\(faq-mass-and-density\)](http://www.npl.co.uk/reference/faqs/how-can-i-determine-my-local-values-of-gravitational-acceleration-and-altitude-(faq-mass-and-density)) , 17. travnja 2010.
- [7] [http://www.ktf-split.hr/bib/mjerni\\_pretvornici\\_u\\_procesnoj\\_industriji.pdf](http://www.ktf-split.hr/bib/mjerni_pretvornici_u_procesnoj_industriji.pdf) , 2. travnja 2010.
- [8] [http://www.kayelaby.npl.co.uk/general\\_physics/2\\_7/2\\_7\\_5.html](http://www.kayelaby.npl.co.uk/general_physics/2_7/2_7_5.html) , 3. svibnja 2010.
- [9] [http://geophysics.ou.edu/solid\\_earth/notes/potential/igf.htm](http://geophysics.ou.edu/solid_earth/notes/potential/igf.htm) , 20. svibnja 2010.